www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

Dans ce problème ρ et α sont deux réels vérifiant $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $\alpha \geqslant 2$.
Pour tout nombre complexe z, $|z|$ est le module de z ; $i^2 = -1$.

PARTIE I

1. Calculer la dérivée, quand elle existe, de la fonction φ réelle de variable réelle définie pour tout t réel par : $\varphi(t) = |1 + \rho e^{it}|$.

2. a. Etudier la fonction réelle, $t \longrightarrow g(t) = |1 + \rho e^{it}|^\alpha + |1 - \rho e^{it}|^\alpha$.

   b. En déduire, pout tout réel t :
   $$|1 + \rho e^{it}|^\alpha + |1 - \rho e^{it}|^\alpha \leqslant |1 + \rho|^\alpha + |1 - \rho|^\alpha \quad (1).$$

   c. w et z étant deux nombres complexes en déduire :
   $$|w + z|^\alpha + |w - z|^\alpha \leqslant (|w| + |z|)^\alpha + ||w| - |z||^\alpha \quad (2).$$
   Déterminer une relation entre z, w, pour que (2) soit une égalité.

3. Soit la fonction f_α définie pour tout t réel par
   $$f_\alpha(t) = 2^{\alpha-1}(1 + |t|^\alpha) - |1 + t|^\alpha - |1 - t|^\alpha .$$

   a. Démontrer que $f_\alpha(t) \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout couple (x,y) réel, la quantité
   $G_\alpha(x,y) = 2^{\alpha-1}(|x|^\alpha + |y|^\alpha) - |x + y|^\alpha - |x - y|^\alpha$, est positive ou nulle.

PARTIE II

On prend $\alpha > 2$.

1. a. Calculer le réel $k > 0$ tel que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = kf_\alpha(t)$ si $-1 \leqslant t \leqslant 1$, et par $h_\alpha(t) = 0$ si $|t| > 1$, soit une densité d'une certaine variable aléatoire réelle X_α.
   On appelle k_α le réel k obtenu.

   b. h_α est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

   c. Donner un infiniment petit équivalent à k_α lorsque α tend vers l'infini.
   En déduire pour t réel $\lim_{\alpha \to +\infty} h_\alpha(t)$, limite que l'on notera h(t) ; définissant ainsi une fonction h, que dire de h ? (En termes de calcul des probabilités).

   d. Déterminer la fonction de répartition F_α de X_α. Vérifier que sur $[-1, 1]$: $F_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}t - \frac{5}{8}t^3 + \frac{3}{16}t^5$.

2. Etudier et représenter graphiquement h_α (dans un repère orthonormé) pour :

   a. $\alpha = 4$; on dessinera la courbe en précisant les points d'inflexion.

   b. $\alpha = 8$; on représentera aussi le graphe de h dans le même repère orthonormé, sans étude des points d'inflexion.

3. a. Calculer l'espérance et la variance V_α de la variable aléatoire X_α ; on donnera V_α sous la forme d'une fraction rationnelle en α, décomposée en éléments simples.

   b. Préciser V_3 et V_4.

   c. Calculer $\lim_{\alpha \to +\infty} V_\alpha$ ainsi que les bornes inférieure et supérieure de V_α quand α varie entre 2 (exclu) et $+\infty$.

4. On envisage une famille Φ de variables aléatoires absolument continues X, Y,... définies sur le même espace probabilisé, et telles que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :
   - X appartient à Φ, si et seulement si, il existe α appartenant à $]2, +\infty[$ tel que h_α (cf. II.1.a.) soit une densité de X ;
   - les éléments de Φ vérifient de plus, la propriété suivante :
     pour deux variables aléatoires X, Y distinctes de Φ, de densités respectives h_α, h_β avec $\alpha > 2, \beta > 2$, X + Y a pour densité $h_{\alpha+\beta}$.

   a. Soit (X, Y) dans $\Phi \times \Phi$, démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

.../...

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt.Bio.Math.-Math 2

b. Calculer la covariance de (X, Y). Vérifier que cette covariance est non nulle pour α et β suffisamment grands.

c. Φ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

PARTIE III

On observe à un instant arbitraire, un convoi de n ($n \geqslant 3$) avions $A_1, A_2, \ldots, A_n$, (assimilés à des points) en vol dans un couloir aérien rectiligne (identifié à un axe orienté par un vecteur unitaire dans le sens du mouvement), et qui se suivent selon l'un des deux plans de vol convenus suivants, (1) et (2), que l'on étudie successivement :

1. Pour tout $k = 2, 3, \ldots, n$:
   (1) A_1 est en tête, A_k suit A_{k-1} et doit maintenir à tout instant, dans la mesure du possible, une distance égale à 1 entre lui et A_{k-1} ; en pratique, on admet le modèle probabiliste suivant :

   La distance D_k de A_k à A_{k-1} à un instant arbitaire est une variable aléatoire telle qu'il existe X_k dans Φ de densité h_ε vérifiant :
   $D_k = 1 + X_k$, où ε est un réel fixe, $\varepsilon > 2$, indépendant de k.

   a. Déterminer la loi de D_k.

   b. Déterminer la loi de la distance entre A_n et A_1.

2. Pour tout $k = 2, 3, \ldots, n$:
   (2) A_1 est toujours en tête, A_k le suit, mais A_k doit maintenir à tout instant une distance égale à k-1 entre lui-même et A_1.
   En fait on admet que la distance Δ_k entre A_k et A_1 est, par hypothèse, une variable aléatoire telle que : $\Delta_k = (k-1) + X_k$.
   (Cf. : notations du III.1.).

   a. Déterminer la loi de Δ_k.

   b. Déterminer la loi de la mesure algébrique Y_k du vecteur $\overrightarrow{A_k A_{k-1}}$.

   c. Calculer la probabilité que Y_k soit négatif.

3. On estime qu'il y a collision (accident) entre A_k et A_{k-1} si à un instant du vol les deux avions se rapprochent à une distance strictement inférieure à 1/100. On prend $\varepsilon = 4$.
   Comparer, en donnant des valeurs approchées les probabilités d'accident entre A_k et A_{k-1} dans chacune des deux situations qui précèdent - l'entier k étant fixé, $n \geqslant k \geqslant 3$ -.
   Vérifier que des deux valeurs trouvées l'une est environ 2,75 fois plus grande que l'autre. On utilisera la précision maximale permise par la calculatrice dont on dispose.

PARTIE IV

Dans le plan euclidien identifié à $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble des couples (x,y) tels que $|x + y| \leqslant 1$ et $|x - y| \leqslant 1$ que l'on désigne par K.

1. a. Représenter graphiquement K.

   b. Calculer $\iint_K G_\alpha(x,y)\, dxdy$ où G_α est définie au I.3.b., avec $\alpha > 2$ donné.

   c. En déduire qu'il existe une constante λ et une fonction de densité H_α telles que :
   $H_\alpha(x,y) = 0$ si (x,y) n'appartient pas à K.
   $H_\alpha(x,y) = \lambda\, G_\alpha(x,y)$ si (x,y) appartient à K.
   Calculer λ. Vérifier que pour $\alpha = 4$ on a : $\lambda = \frac{3}{4}$.

2. (X,Y) étant un couple de variables aléatoires de densité H_α.

   a. Déterminer par leurs densités les lois de X et Y.

   b. Calculer la covariance du couple (X,Y).

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail